Architecture des systèmes numériques et informatiques

Cours 3 - Simplification - Méthode Karneauth (k-map)

Halim Djerroud

révision : 1.0

Plan du cours

Méthode de simplification de Karnaugh

Objectifs du chapitre :

- Comprendre les limites de la simplification algébrique
- Découvrir la méthode graphique de Karnaugh
- Identifier les avantages de cette méthode

Rappels : Algèbre de Boole

- **Variables binaires** : prennent les valeurs 0 ou 1.
- **Opérations fondamentales** :
  - ET (AND) : $A \cdot B$ ou AB
  - OU (OR) : $A + B$
  - NON (NOT) : $\overline{A}$
- **Fonctions logiques** : combinaisons de variables et d'opérateurs.
- **Applications** : circuits numériques, automatismes, systèmes embarqués.

La simplification : pourquoi ?

- **Objectif** : réduire la complexité d'une fonction logique.
- **Avantages pratiques** :
  - Moins de portes logiques dans le circuit,
  - Réduction des coûts de fabrication,
  - Diminution de la consommation électrique,
  - Amélioration de la vitesse de traitement.
- **Exemple** :
  - Forme non simplifiée : $F = A\overline{B}C + ABC + A\overline{B}\,\overline{C}$
  - Forme simplifiée : $F = A\overline{B} + ABC$

LISV Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles
UVSQ université PARIS-SACLAY

Méthodes de simplification classiques

- **Simplification algébrique** :
  - Utilise les théorèmes de l'algèbre de Boole,
  - Factorisation, mise en évidence, absorption,
  - **Limites** : longue, fastidieuse, risque d'erreurs, pas systématique.
- **Table de vérité** :
  - Liste toutes les combinaisons possibles,
  - Permet d'obtenir les minterms et maxterms,
  - **Limites** : ne donne pas directement la forme simplifiée.
- **Besoin** : une méthode systématique, visuelle et efficace.

La méthode de Karnaugh : historique

- **Créée en 1953** par Maurice Karnaugh (Bell Labs).
- **Inspiration** : diagramme de Veitch (1952).
- **Innovation** : représentation graphique en tableau.
- **Principe** : organiser les minterms pour visualiser les simplifications possibles.
- **Adoption** : largement utilisée en électronique numérique et dans l'enseignement.

Principe de la méthode de Karnaugh

- **Représentation graphique** : tableau à double entrée.
- **Chaque case** correspond à une combinaison des variables d'entrée (un minterm).
- **Organisation spéciale** : code Gray (une seule variable change entre deux cases adjacentes).
- **Simplification visuelle** : regroupement de cases adjacentes contenant des 1.
- **Résultat** : expression simplifiée directement lisible sur le tableau.

Avantages de la méthode de Karnaugh

- **Méthode systématique** : algorithme clair et reproductible.
- **Approche visuelle** : facilite la détection des simplifications.
- **Rapidité** : plus rapide que la simplification algébrique pour 2 à 6 variables.
- **Garantie du résultat** : obtention d'une forme minimale (ou proche).
- **Gestion des cas indéterminés** : intègre facilement les conditions "don't care".
- **Pédagogique** : excellente pour comprendre les principes de simplification.

Limitations de la méthode

- **Nombre de variables limité** :
  - Pratique jusqu'à 4 variables (tableau 4×4),
  - Possible jusqu'à 6 variables (deux tableaux 4×4),
  - Au-delà : méthodes algorithmiques nécessaires (Quine-McCluskey).
- **Complexité visuelle** : tableaux à 5-6 variables difficiles à manipuler.
- **Automatisation** : moins adaptée aux outils informatiques que d'autres algorithmes.

Idéale pour l'apprentissage et les cas pratiques courants.

Domaines d'application

- **Conception de circuits numériques** : portes logiques, multiplexeurs, décodeurs.
- **Systèmes combinatoires** : ALU, unités de contrôle, circuits arithmétiques.
- **Automatismes industriels** : automates programmables, contrôle-commande.
- **Optimisation de circuits** : réduction de la surface de silicium, économie d'énergie.
- **Enseignement** : compréhension intuitive de la simplification logique.
- **FPGA et ASIC** : phase de conception préliminaire.

Construction des tableaux de Karnaugh

Objectifs du chapitre :

- Comprendre la structure d'un tableau de Karnaugh
- Maîtriser le code Gray
- Savoir remplir un tableau à partir d'une table de vérité

Principe du tableau de Karnaugh

- **Tableau à double entrée**
- Chaque case = une combinaison des variables
- Cases adjacentes : une seule variable change
- Facilite la détection des regroupements

$f(A,B)$		B
	0	1
A	1	0

Le code Gray : principe

- **Code binaire réfléchi** : un seul bit change entre deux valeurs consécutives.
- **Pourquoi ?** Assure l'adjacence logique dans le tableau.
- **Différence avec le binaire naturel** :

Binaire naturel	**Code Gray**
00	00
↓ 1 bit	↓ 1 bit
01	01
↓ 2 bits	↓ 1 bit
10	11
↓ 1 bit	↓ 1 bit
11	10

Code Gray pour 2, 3 et 4 bits

2 bits

Décimal	Gray
0	00
1	01
2	11
3	10

3 bits

Décimal	Gray
0	000
1	001
2	011
3	010
4	110
5	111
6	101
7	100

Ordre typique

Pour les tableaux :

2 variables : **0, 1, 3, 2**

3 variables : **0, 1, 3, 2, 6, 7, 5, 4**

Tableau de Karnaugh à 3 variables

Structure :

- 2 lignes (variable A)
- 4 colonnes (variables B, C)
- 8 cases au total
- Ordre : **00, 01, 11, 10**

BC	00	01	11	10
A=0	m_0	m_1	m_3	m_2
A=1	m_4	m_5	m_7	m_6

Ordre Gray : une seule variable change entre cases adjacentes

Tableau de Karnaugh à 4 variables

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

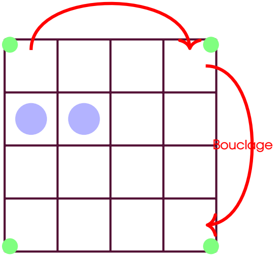
Tableau 4×4 : 16 cases pour 4 variables (A, B, C, D)

Adjacence dans le tableau

Types d'adjacence :

- Horizontale
- Verticale
- **Bords opposés** (bouclage)
- Coins (pour 4 variables)

Le tableau est **torique** : les bords se rejoignent !



Adjacence horizontale

Les 4 coins sont adjacents !

Remplissage à partir d'une table de vérité

Exemple : 3 variables

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Étapes :

1. Identifier les minterms où F=1
2. Placer des 1 dans les cases correspondantes
3. Placer des 0 ailleurs

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	1	1	0

Exercice guidé : construction pour 4 variables

Fonction : $F(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 14)$

Les 1 en rouge correspondent aux minterms de la fonction

LISV Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles | UVSQ université PARIS-SACLAY

Notation alternative : forme compacte

Différentes notations :

- $\sum m(\ldots)$: somme de minterms
- $\prod M(\ldots)$: produit de maxterms
- Expression algébrique

Exemple :

$F = \sum m(0,2,3,7)$

équivaut à :

$F = \overline{ABC} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}BC + ABC$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0

Exercice pratique

À faire : Construire le tableau de Karnaugh pour la fonction suivante

$$F(A, B, C, D) = \sum m(1, 3, 4, 6, 9, 11, 12, 14)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Conseil : Identifiez d'abord les positions de chaque minterm

Récapitulatif du chapitre

- **Structure du tableau** :
  - 2 variables : tableau 2×2 (4 cases)
  - 3 variables : tableau 2×4 (8 cases)
  - 4 variables : tableau 4×4 (16 cases)
- **Code Gray** : ordre spécial assurant l'adjacence logique (00, 01, 11, 10)
- **Remplissage** : placer 1 pour chaque minterm de la fonction
- **Adjacence** : horizontale, verticale, et par bouclage des bords
- **Prochaine étape** : utiliser ces tableaux pour simplifier les fonctions

Simplification par la méthode de Karnaugh

Objectifs du chapitre :

- Maîtriser les règles de regroupement
- Identifier les groupements optimaux
- Extraire l'expression simplifiée

Principe de la simplification

Objectif :

- Regrouper les cases adjacentes contenant des 1
- Chaque groupement élimine une ou plusieurs variables
- Obtenir l'expression minimale

Base algébrique :

$AB + A\overline{B} = A(B + \overline{B}) = A$

On élimine la variable qui change dans le groupement

A \ BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	1	1	0	0

$A\overline{B}$

C disparaît car elle change dans le groupe

LISV Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles
UVSQ université PARIS-SACLAY

Règles de regroupement

1. **Taille des groupements** : puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16)
2. **Forme** : rectangulaire uniquement
3. **Adjacence** : horizontale, verticale, ou par bouclage
4. **Maximalité** : grouper le maximum de cases possibles
5. **Couverture** : chaque 1 doit être dans au moins un groupe
6. **Chevauchement autorisé** : un 1 peut appartenir à plusieurs groupes
7. **Objectif** : minimiser le nombre de groupes

Règle d'or

Plus un groupement est grand, plus l'expression est simple !

Tailles de groupements possibles

Groupe de 1

1	0

3 variables

Groupe de 2

1	1

2 variables

Groupe de 4

1	1	1	1

1 variable

Groupe de 4 (2×2)

1	1
1	1

1 variable

Groupe de 8

1	1	1	1
1	1	1	1

constante = 1

Exemple 1 : Simplification avec 3 variables

Fonction donnée :

$F = \sum m(0, 2, 5, 7)$

Groupements identifiés :

- Groupe rouge : m0, m2
- Groupe bleu : m5, m7

Expression simplifiée :

$F = \overline{AC} + AC$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	0	1	1	0

Exemple 2 : Regroupement avec bouclage

Fonction :

$F = \sum m(0, 1, 2, 4, 6)$

Groupements :

- Groupe rouge : m0, m1, m4
- Groupe vert : m0, m2 (bouclage)
- Groupe bleu : m2, m6

Expression :

$F = \overline{BC} + \overline{AC} + B\overline{C}$

Simplifiable en : $F = \overline{C}$

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	0	0	1

Regroupement optimal en violet

Exemple 3 : Cas avec 4 variables

Fonction :
$F = \sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,14)$

Groupements optimaux :

- Rouge : m0,m1,m8,m9 (groupe de 4)
- Bleu : m2,m6,m14 à compléter
- Vert : m5,m7 (groupe de 2)

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	0	1	1	1
11	1	1	0	0
10	0	0	1	0

Expression simplifiée : $F = \overline{BD} + A\overline{C} + \overline{A}BC$

Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles

Extraction de l'expression : méthode

Pour chaque groupement :

1. Identifier les variables qui **ne changent pas** dans le groupe
2. Conserver uniquement ces variables dans le terme
3. Noter leur valeur :
   - Variable à 1 : garder la variable telle quelle
   - Variable à 0 : prendre le complément $\overline{Variable}$
4. Faire le OU logique (+) de tous les termes

Exemple

Groupe couvrant les cases où $A = 0$ et $C = 1$ (B et D varient)

$\Rightarrow$ Terme : $\overline{A}C$

LISV Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles — UVSQ université PARIS-SACLAY

Exemple détaillé d'extraction

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	1	0	0

G1

G2

Groupe G1 (rouge) :

- Cases : (A=0,B=0,C=1) et (A=0,B=1,C=1)
- A constant à 0 : $\overline{A}$
- C constant à 1 : C
- B varie : éliminé
- **Terme :** $\overline{A}C$

Groupe G2 (bleu) :

- A constant à 1 : A
- B constant à 0 : $\overline{B}$
- C varie : éliminé
- **Terme :** $A\overline{B}$

Résultat : $F = \overline{A}C + A\overline{B}$

Simplification des maxterms (cas des 0)

Principe :

- On peut aussi regrouper les 0
- Donne la forme Produit de Sommes
- Utile si moins de 0 que de 1

Méthode :

1. Regrouper les 0
2. Variables constantes : inverser la règle
3. Connecter par ET (produit)

$$F = (A + \overline{B}) \cdot (\overline{A} + C)$$

	BC	00	01	11	10
A	0	1	0	0	1
	1	1	0	0	1

Regroupement des 0 en rouge

Stratégie de simplification optimale

Comment obtenir la meilleure simplification ?

1. **Identifier les groupes essentiels** :
   - 1 qui ne peut être couvert que par un seul groupe
2. **Former les plus grands groupes possibles**
3. **Minimiser le nombre total de groupes**
4. **Accepter les chevauchements** si nécessaire
5. **Vérifier la couverture complète** : tous les 1 doivent être couverts

Attention

Il peut y avoir plusieurs solutions équivalentes !

Groupes essentiels vs groupes optionnels

	BC	00	01 (E)	11	10
A	0	0	1	0	0
	1	1	1	1	0

Analyse :

- Groupe E : essentiel
  - Seul à couvrir m1
- Groupe bleu : optionnel
  - Couvre m4, m5
- Groupe vert : optionnel
  - Couvre m5, m7

Choisir le groupe bleu ou vert selon les autres contraintes

Simplifier : $F(A, B, C, D) = \sum m(0, 2, 5, 7, 8, 10, 13, 15)$

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	1

À faire : Identifier les groupements optimaux et extraire l'expression simplifiée

Solution de l'exercice

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
11	0	0	1	0
10	1	0	0	1

Groupements :

- Groupe rouge : (4 cases)
  - m0, m2, m8, m10
  - Variables : $\overline{BD}$
- Groupe bleu : (2 cases)
  - m5, m7
  - Variables : $\overline{A}BC$
- Groupe vert : (4 cases)
  - m7, m5, m15, m13
  - Variables : BD

Expression simplifiée :

$F = \overline{BD} + BD$

Cas particulier : symétrie XOR

Configuration en échiquier :

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	1	0
1	0	1	0	1

Particularité :

- Aucun regroupement possible !
- Tous les 1 sont isolés
- Configuration type XOR

Expression :

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C + AB\overline{C}$$

ou plus simplement :

$$F = A \oplus B \oplus C$$

Cas où Karnaugh n'apporte pas de simplification

LISV
Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles
UVSQ
université PARIS-SACLAY

Comparaison : avant/après simplification

Forme canonique :

$$F = \sum m(1, 3, 5, 7, 9, 15)$$

$$\begin{aligned} F = {} & \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D + \overline{A}\,\overline{B}CD \\ & + \overline{A}B\overline{C}D + \overline{A}BCD \\ & + A\overline{B}\,\overline{C}D + ABCD \end{aligned}$$

Complexité :

- 6 termes produits
- 24 littéraux au total
- Circuit très complexe

Forme simplifiée :

Après regroupement dans le tableau :

$$F = D$$

Gain :

- 1 seul terme !
- 1 littéral
- Réduction massive
- Circuit trivial

Économie : de 6 portes ET + 1 porte OU à 0 porte (juste un fil) !

Exercice pratique final

Simplifier les fonctions suivantes :

1. $F_1(A, B, C) = \sum m(0, 1, 3, 6, 7)$
2. $F_2(A, B, C, D) = \sum m(0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13)$
3. $F_3(A, B, C, D) = \sum m(2, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 13, 15)$

Démarche :

1. Construire le tableau de Karnaugh
2. Identifier les groupements optimaux
3. Extraire l'expression simplifiée
4. Vérifier que tous les minterms sont couverts

Récapitulatif du chapitre

Points clés à retenir :

- **Règles de regroupement** :
  - Tailles en puissances de 2 (1, 2, 4, 8, 16)
  - Formes rectangulaires uniquement
  - Bouclage des bords autorisé
- **Stratégie optimale** :
  - Former les plus grands groupes possibles
  - Minimiser le nombre de groupes
  - Identifier les groupes essentiels
- **Extraction de l'expression** :
  - Garder les variables constantes dans chaque groupe
  - Compléter si variable = 0
  - Faire le OU des termes

Cas particuliers et extensions

Objectifs du chapitre :

- Gérer les conditions indifférentes (don't care)
- Simplifier avec 5 et 6 variables
- Cas limites et astuces pratiques

Les conditions indifférentes : introduction

Qu'est-ce qu'un "don't care" ?

- Combinaisons d'entrées qui ne se produisent jamais
- Ou dont la sortie importe peu
- Notées X ou ϕ ou -
- Peuvent être considérées comme 0 ou 1

Exemples :

- Code BCD : combinaisons 10-15
- Codes détecteurs d'erreurs
- États interdits dans un automate

Table de vérité avec X :

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	X
1	0	0	X
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Les X peuvent prendre 0 ou 1 selon notre choix

Utilisation des don't care dans Karnaugh

Principe :

- Les X sont des "jokers"
- On les considère comme 1 s'ils aident à former un groupe plus grand
- On les considère comme 0 sinon
- Objectif : maximiser la simplification

A \ BC	00	01	11	10
0	1	0	X	1
1	X	1	1	0

Les X en bleu peuvent être utilisés librement

Notation :

$$F(A,B,C) = \sum m(0,2,5,7) + d(3,4)$$

d() = conditions indifférentes

Exemple 1 : Simplification avec don't care

Sans utiliser les X :

BC	00	01	11	10
0	1	0	X	1
1	X	1	1	0

$$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + AC$$

3 termes, pas optimal

En utilisant les X :

BC	00	01	11	10
0	1	0	X	1
1	X	1	1	0

$$F = \overline{A}\overline{C} + AC$$

2 termes seulement !

Le X en (0,11) est traité comme 1, celui en (1,00) comme 0

Exemple 2 : Code BCD avec don't care

Problème :

Code BCD (0-9), les combinaisons 10-15 n'existent pas

Fonction : détecter les nombres ≥ 5

$$F = \sum m(5, 6, 7, 8, 9) \\ + d(10, 11, 12, 13, 14, 15)$$

6 don't care à exploiter !

Solution optimale : $F = A + BC$

On utilise les X pour former de grands groupes

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	1
11	X	X	X	X
10	1	1	X	X

Stratégie avec les don't care

Comment utiliser efficacement les X ?

1. **Placer les X dans le tableau** (avec une couleur différente)
2. **Les utiliser pour agrandir les groupes** de 1 si cela réduit le nombre de termes
3. **Ne pas les regrouper seuls** : un X isolé ne crée pas de terme
4. **Vérifier que tous les 1 sont couverts** (mais pas besoin de couvrir tous les X)

Important

Les X sont utilisés pour simplifier, mais ne créent pas d'obligations de couverture. Un X peut rester non couvert si cela donne une meilleure simplification.

Tableaux à 5 variables : principe

Problème :

- 5 variables = $2^5 = 32$ cases
- Impossible en un seul tableau 2D

Solution :

- Utiliser **deux tableaux** 4×4
- Un pour E=0, un pour E=1
- Superposer mentalement
- Cases à la même position sont adjacentes

Adjacence :

- Dans chaque tableau : comme avant
- Entre tableaux : verticalement

Tableau pour E=0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Tableau pour E=1

16	17	19	18
20	21	23	22
28	29	31	30

Exemple avec 5 variables

Fonction : $F(A, B, C, D, E) = \sum m(0, 1, 4, 5, 16, 17, 20, 21)$

E=0

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

E=1

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

Analyse : Les deux groupes sont à la même position $\Rightarrow$ on peut les fusionner !

$F = \overline{A}\overline{B}\overline{D}$ (E est éliminée car elle varie entre les deux tableaux)

Regroupements entre les deux tableaux

Types de regroupements :

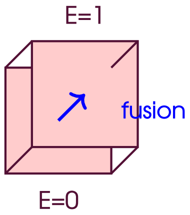
- **Dans un seul tableau** : E reste dans le terme
- **Entre les deux tableaux** : E est éliminée
- **Groupes de 2, 4, 8, 16** cases possibles

Exemple :

Si un groupe de 4 en E=0 et le même en E=1 :

$\Rightarrow$ Groupe de 8 total

$\Rightarrow$ E disparaît du terme



Groupes superposés fusionnent

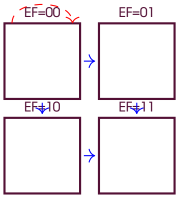
Tableaux à 6 variables

Méthode :

- **4 tableaux** 4×4
- Variables EF = 00, 01, 11, 10
- $2^6 = 64$ cases au total
- Adjacences multiples à gérer

Difficulté :

- Visualisation complexe
- Risque d'erreurs élevé
- Souvent préférable d'utiliser une méthode algorithmique



Organisation en code Gray

Recommandation

Au-delà de 4 variables, privilégier les outils informatiques ou la méthode de Quine-McCluskey

Limites pratiques de Karnaugh

Quand utiliser Karnaugh ?

- **Optimal :** 2 à 4 variables
  - Rapide, visuel, pédagogique
- **Possible :** 5 variables
  - Deux tableaux, faisable à la main
- **Difficile :** 6 variables
  - Quatre tableaux, risque d'erreurs
- **Non recommandé :** 7+ variables
  - Utiliser Quine-McCluskey ou outils CAO

Alternative

Pour les systèmes complexes : logiciels de synthèse logique (Quartus, Vivado, etc.)

Exercice : simplification avec don't care

Problème : Simplifier la fonction suivante

$$F(A,B,C,D) = \sum m(1,3,7,11,15) + d(0,2,5)$$

AB \ CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Consignes :

1. Placer les 1 et les X dans le tableau
2. Identifier les groupements optimaux en utilisant les X
3. Extraire l'expression minimale

Solution de l'exercice

AB \ CD	00	01	11	10
00	X	1	1	X
01	0	X	1	0
11	0	0	1	0
10	0	0	0	0

Analyse des groupements :

- Groupe rouge :
  - m1, m3 + X en m0, m2
  - Groupe de 4
  - $\overline{A}\overline{B}$
- Groupe vert :
  - m3, m7, m11, m15
  - Groupe de 4
  - CD

Expression finale :

$F = \overline{A}\overline{B} + CD$

Le X en m5 n'est pas utilisé (pas nécessaire)

Comparaison des méthodes de simplification

Critère	Karnaugh	Algébrique	Quine-McC.
Visuel	+++	-	+
Rapidité (2-4 var)	+++	+	++
Systématique	+++	-	+++
Pédagogique	+++	++	+
Don't care	+++	+	+++
5+ variables	-	--	+++
Automatisable	+	-	+++

Conclusion

Karnaugh est idéal pour l'apprentissage et les cas pratiques jusqu'à 4-5 variables

Astuces et pièges à éviter

Erreurs fréquentes :

- **Mauvais ordre des colonnes/lignes** : toujours respecter le code Gray
- **Oublier le bouclage** : les bords opposés sont adjacents !
- **Groupes non rectangulaires** : interdits (pas de L, T, etc.)
- **Tailles non-puissances de 2** : groupe de 3 ou 6 impossible
- **Ignorer les don't care** : toujours les exploiter pour agrandir
- **Sur-utiliser les X** : ne pas créer de termes juste avec des X

Conseil

Vérifier systématiquement : tous les 1 sont-ils couverts ? Les groupes sont-ils maximaux ?

Exemple de piège : groupement invalide

Groupement INVALIDE :

BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

INTERDIT !

Groupement VALIDE :

OK

BC	00	01	11	10
0	0	1	1	0
1	1	0	1	0

Faire 3 groupes rectangulaires au lieu d'un groupe en L

Cas spécial : fonction constante

Tous les 1 :

BC	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

$F = 1$ (fonction toujours vraie)

Tous les 0 :

BC	00	01	11	10
0	0	0	0	0
1	0	0	0	0

$F = 0$ (fonction toujours fausse)

Note

Ces cas triviaux se détectent immédiatement sur le tableau

Exercice avancé : 5 variables

Simplifier : $F(A,B,C,D,E) = \sum m(0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22)$

Observation : Tous les minterms ont D=0

Tableau E=0 :
Contient m0, m2, m4, m6, m8, m10, m12, m14

Tableau E=1 :
Contient m16, m18, m20, m22, (même pattern)

Question : Quelle sera l'expression simplifiée ?

1. $F = \overline{D}$
2. $F = \overline{CD}$
3. $F = ABE + \overline{D}$

Solution de l'exercice avancé

Réponse : $F = \overline{D}$

Justification :

- Tous les minterms où D=0 sont présents
- Peu importe les valeurs de A, B, C, E
- Le tableau E=0 est entièrement rempli sur les colonnes CD=00 et CD=10
- Le tableau E=1 aussi
- Donc : groupe de 16 cases (la moitié du tableau 5 variables)

Leçon

Avant de commencer les regroupements, chercher les patterns évidents ! Une variable qui apparaît toujours avec la même valeur simplifie drastiquement.

Récapitulatif du chapitre

Points essentiels :

- **Don't care (X)** :
  - Utilisés comme jokers pour agrandir les groupes
  - Ne créent pas d'obligation de couverture
  - Maximisent la simplification
- **5 variables** :
  - 2 tableaux 4×4
  - Adjacence entre tableaux superposés
  - Encore faisable à la main
- **6 variables** :
  - 4 tableaux 4×4
  - Complexité élevée, risque d'erreurs
- **Limites** :
  - Au-delà de 6 variables : méthodes algorithmiques
  - Toujours respecter : code Gray, rectangularité, puissances de 2