LISV Laboratoire d'ingénierie des systèmes de Versailles — UVSQ université PARIS-SACLAY

Architecture des systèmes numériques et informatiques
TD 2 - Démonstrations et simplifications algébriques

Halim Djerroud

révision 1.0

Exercice 1 : Démonstrations algébriques

1. Montrer qu'il est possible d'exprimer l'opérateur **et** à partir des opérateurs **ou** et **non**.

   Solution :

   Idée. Utiliser les lois de De Morgan pour éliminer l'opérateur **et**.

   $$A \cdot B \;=\; \overline{\overline{A \cdot B}} \;=\; \overline{\overline{A} \;+\; \overline{B}}$$

   Donc, $A \cdot B = \overline{\overline{A} + \overline{B}}$, ce qui exprime **et** uniquement avec **ou** et **non**.

2. Montrer qu'il est possible d'exprimer l'opérateur **ou** à partir des opérateurs **et** et **non**.

   Solution :

   Idée. Appliquer les lois de De Morgan pour éliminer l'opérateur **ou**.

   $$A + B \;=\; \overline{\overline{A + B}} \;=\; \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$$

   Ainsi, $A + B = \overline{\overline{A} \cdot \overline{B}}$, ce qui exprime **ou** uniquement avec **et** et **non**.

3. Montrer à l'aide de tables de vérité que :
   — $A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}$
   — $A \oplus B = (A + B)(\bar{A} + \bar{B})$

   Solution :

   Vérification par tables de vérité.

A	B	$A \oplus B$	$\bar{A}B + A\bar{B}$	$(A+B)(\bar{A}+\bar{B})$
0	0	0	$0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$	$(0+0)(1+1) = 0 \cdot 1 = 0$
0	1	1	$1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1$	$(0+1)(1+0) = 1 \cdot 1 = 1$
1	0	1	$0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$	$(1+0)(0+1) = 1 \cdot 1 = 1$
1	1	0	$0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$	$(1+1)(0+0) = 1 \cdot 0 = 0$

   On constate, ligne par ligne, que les colonnes $A \oplus B$, $\bar{A}B + A\bar{B}$ et $(A+B)(\bar{A}+\bar{B})$ coïncident. Ainsi :

   $$A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B} = (A+B)(\bar{A}+\bar{B}).$$

4. Montrer que :
   — $A + (\bar{A}B) = A + B$
   — $A(\bar{A} + B) = AB$

   Solution :

   Preuves algébriques.
   — $A + (\bar{A}B) = (A + \bar{A})(A + B) = 1 \cdot (A + B) = A + B.$
   — $A(\bar{A} + B) = A\bar{A} + AB = 0 + AB = AB.$

5. Déterminer le complément de l'expression :
   — $A + \bar{B}C$

   Solution :

   Complément de l'expression.

   $$\overline{A + \bar{B}C} = \overline{A} \cdot \overline{\bar{B}C} = \overline{A} \cdot (B + \overline{C})$$

   Ainsi, le complément est : $\overline{A}(B + \overline{C})$.

6. Écrire l'expression à l'aide des opérateurs **et**, **ou** et **non** :
   — $\overline{A \oplus B}$

   Solution :

   Expression de $\overline{A \oplus B}$.

   On sait que :
$$A \oplus B = \bar{A}B + A\bar{B}.$$
   Donc :
$$\overline{A \oplus B} = \overline{\bar{A}B + A\bar{B}}.$$
   En appliquant De Morgan :
$$\overline{A \oplus B} = (\overline{\bar{A}B}) \cdot (\overline{A\bar{B}}) = (A + \bar{B})(\bar{A} + B).$$
   En développant :
$$(A + \bar{B})(\bar{A} + B) = AB + \bar{A}\bar{B}.$$
   Ainsi, avec **et**, **ou**, **non** :
$$\boxed{\overline{A \oplus B} = (A \cdot B) + (\bar{A} \cdot \bar{B})}$$
   (XNOR).

Exercice 2 : Simplifications algébriques

Simplifier les expressions suivantes :

1. $\bar{A}B + AB$
2. $(A + B)(A + \bar{B})$
3. $A + AB$
4. $A(A + B)$
5. $\bar{A}\bar{B} + \overline{A + B + C + D}$

Solution :

Simplifications détaillées :

1. $\bar{A}B + AB$
   On factorise par B :
   $\bar{A}B + AB = B(\bar{A} + A) = B \cdot 1 = B$.
   $\Rightarrow \boxed{B}$.
2. $(A + B)(A + \bar{B})$
   On applique la distributivité :
   $(A + B)(A + \bar{B}) = A(A + \bar{B}) + B(A + \bar{B})$
   $= A + AB + B\bar{B}$
   $= A + AB + 0$
   $= A + AB$
   Or $A + AB = A(1 + B) = A \cdot 1 = A$.
   $\Rightarrow \boxed{A}$.
3. $A + AB$
   On factorise A :
   $A + AB = A(1 + B) = A \cdot 1 = A$.
   $\Rightarrow \boxed{A}$.
4. $A(A + B)$
   On applique distributivité :
   $A(A + B) = AA + AB = A + AB$.
   Puis absorption : $A + AB = A$.
   $\Rightarrow \boxed{A}$.

5. $\bar{A}\bar{B} + \overline{A+B+C+D}$
   On développe le complément :
   $\overline{A+B+C+D} = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$.
   Donc : $\bar{A}\bar{B} + \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$
   On factorise par $\bar{A}\bar{B}$:
   $= \bar{A}\bar{B}(1+\bar{C}\bar{D})$
   Or $(1+X) = 1$, donc :
   $= \bar{A}\bar{B}\cdot 1 = \bar{A}\bar{B}$.
   $\Rightarrow \boxed{\bar{A}\bar{B}}$.

Exercice 3 : Génération et simplification d'expressions logiques

1. Soit la table de vérité ci-après :

A	B	C	$F(A,B,C)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

   — Exprimer cette table de vérité sous la forme d'une expression algébrique SPD et PDS.
   — Simplifier expression.
   — Dessiner le circuit.

   Solution :
   À partir de la table : lignes où $F = 1$: $000,\ 010,\ 011,\ 100$.

   (1) Forme SPD (Somme de Produits / somme de mintermes).

$$F(A,B,C) = \bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C} \;+\; \bar{A}\,B\,\bar{C} \;+\; \bar{A}\,B\,C \;+\; A\,\bar{B}\,\bar{C}$$
$$= \boxed{\bar{A}\bar{B}\bar{C} \;+\; \bar{A}B\bar{C} \;+\; \bar{A}BC \;+\; A\bar{B}\bar{C}}.$$

   (2) Forme PDS (Produit de Sommes / produit de maxtermes). Zéros aux lignes $001,\ 101,\ 110,\ 111 \Rightarrow$ maxtermes M_1, M_5, M_6, M_7 :

$$\boxed{F = (A+B+\bar{C})\,(\bar{A}+B+\bar{C})\,(\bar{A}+\bar{B}+C)\,(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})}.$$

   (3) Simplification (K-map / algèbre). Regroupements :

$$\bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC = \bar{A}B, \qquad \bar{A}\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} = \bar{B}\bar{C}.$$

   Donc

$$\boxed{F = \bar{A}B \;+\; \bar{B}\,\bar{C}}.$$

   Remarque : Cette forme est minimale (2 produits de deux littéraux chacun).

2. La table de vérité ci-après exprime la parité, c-à-d $F(A,B,C) = 1$ lorsque le nombre d'entrées de valeur 1 est impair.

A	B	C	$F(A,B,C)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

— Exprimer cette table de vérité sous la forme d'une expression algébrique SDP et PDS.
— Simplifier expression.
— Dessiner le circuit.

Solution :

Parité impaire sur trois variables.

Lignes où $F = 1$: $001,\ 010,\ 100,\ 111$.

(1) Forme SPD (Somme de Produits / mintermes).

$$\boxed{F(A,B,C) = \bar{A}\,\bar{B}\,C \;+\; \bar{A}\,B\,\bar{C} \;+\; A\,\bar{B}\,\bar{C} \;+\; A\,B\,C}$$

(2) Forme PDS (Produit de Sommes / maxtermes). Zéros aux lignes $000,\ 011,\ 101,\ 110$:

$$\boxed{F = (A+B+C)\,(A+\bar{B}+\bar{C})\,(\bar{A}+B+\bar{C})\,(\bar{A}+\bar{B}+C)}$$

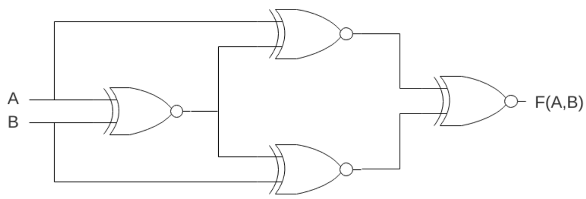
(3) Simplification. La fonction est la *parité impaire* :

$$\boxed{F = A \oplus B \oplus C}$$

(on peut vérifier que $A \oplus B \oplus C$ prend la valeur 1 quand le nombre de 1 en entrée est impair).

Exercice 4 : Simplification de circuits

1. Soit le circuit suivant :



— Exprimer le circuit suivant sous forme d'une expression algébrique.
— Simplifier expression.
— Dessiner le nouveau circuit.

Exercice 5 : Application

1. Pour assurer la sécurité d'une chambre forte d'une banque, on utilise 4 détecteurs de mouvements, 1 détecteur sur chaque porte. En cas d'infraction, ces détecteurs mettent à la masse (niveau logique 0) des interrupteurs d_0, d_1, d_2 et d_3 un interrupteur pour chaque détecteur.

   On souhaite réaliser un circuit électronique qui allume une lampe jaune s'il n'y a qu'une seule effraction ou une lampe rouge s'il y en a plusieurs, sachant qu'une seule lampe peut être allumé à la fois et la lampe rouge est prioritaire.

   — Donner la table de vérité de ce système.
   — Donner les expressions SDP ou PDS de ces fonctions.
   — Simplifier les fonctions
   — Réaliser le circuit de la lampe jaune et la lampe rouge.
   — Réaliser et tester le circuit à l'aide du logiciel **Logisim**

   Solution :

   Système d'alarme à 4 détecteurs (actifs à 0).

   Chaque détecteur d_i vaut 0 en cas d'infraction. Posons $x_i = \overline{d_i}$, ainsi $x_i = 1$ signifie « infraction sur la porte i ». Nous voulons :

$$Y = 1 \iff \text{exactement une infraction}, \qquad R = 1 \iff \text{au moins deux infractions (prioritaire)}.$$

Table de vérité (sur d_0, d_1, d_2, d_3).

d_0	d_1	d_2	d_3	Y	R
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0
1	1	1	1	0	0

Expressions algébriques (formes SDP). Lampe jaune (exactement une infraction) :

$$\boxed{Y = \overline{d_0}d_1d_2d_3 \; + \; d_0\overline{d_1}d_2d_3 \; + \; d_0d_1\overline{d_2}d_3 \; + \; d_0d_1d_2\overline{d_3}}.$$

Lampe rouge (au moins deux infractions) : forme compacte par paires

$$\boxed{R = \overline{d_0}\,\overline{d_1} + \overline{d_0}\,\overline{d_2} + \overline{d_0}\,\overline{d_3} + \overline{d_1}\,\overline{d_2} + \overline{d_1}\,\overline{d_3} + \overline{d_2}\,\overline{d_3}}.$$

(Cette somme de produits couvre naturellement les cas 2, 3 ou 4 infractions.)

Simplifications et priorité. Les formes ci-dessus sont déjà minimales (ou proches du minimal) et directement réalisables. Pour garantir qu'une seule lampe s'allume et que la rouge soit prioritaire, on câble :

$$\boxed{Y' = Y \cdot \overline{R}}$$

et on pilote la lampe jaune avec Y' (et la rouge avec R).

Réalisation du circuit.
— **Jaune** : quatre portes `ET` (4 entrées) pour les quatre mintermes « one-hot », sommées par une `OU`. Entrées fautives inversées ($\overline{d_i}$), les autres directes.
— **Rouge** : six portes `ET` (2 entrées) réalisant chaque paire $\overline{d_i}\,\overline{d_j}$, sommées par une `OU`.
— Ajouter un inverseur sur R et une porte `ET` pour former $Y' = Y \cdot \overline{R}$ (priorité rouge).